VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

CURSUL 5

SISTEME VIBRANTE CU nGLD

5.1. Vibraţii libere ale sistemelor cu nGLD. Metoda matricei de rigiditate

Se consideră un sistem cu nGLD. Sub acţiunea unui impuls iniţial (viteză şi deplasare) sistemul va vibra în raport cu poziţia de echilibru static, figura 5.1.

La momentul t al vibraţiei pe direcţia gradelor de libertate dinamică se măsoară deplasările $y_j(t), t = \overline{1,n}$, figura 5.1.b, care alcătuiesc vectorul (matricea coloană) $\{y(t)\}$.

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ y_j(t) \\ . \\ y_n(t) \end{Bmatrix}. \tag{5.1}$$

Pentru a folosi, în analiza dinamică a sistemelor, metoda matricei de rigiditate se vor bloca toate deplasările pe direcţiile GLD, obţinând sistemul de bază dinamic. Împiedicarea deplasărilor se realizeazăcu ajutorul blocajelor simple: reazeme simplu rezemate, pentru deplasări liniare şi blocaje de nod, pentru deplasările unghiulare.

In vederea aplicării principiului lui d'Alembert se va acţiona, succesiv, sistemul de bază dinamic, cu deplasările: $y_1(t),..,y_j(t),..,y_n(t)$, aplicate pe direcţiile GLD sub formă de cedări de reazem. În figura 5.1.d este desenată deformata sistemului vibrant corespunzătoare cedării de reazem, $y_j(t)$. În fiecare blocaj iau naştere reacţiunile: $R_1(t),..,R_j(t),..,R_n(t)$, iar în blocajul corespunzător GLD_j ia naştere şi forţa de inerţie, datorită deplasării masei m_j, notată $I_j(t)$.

Se constituie vectorul forţelor de inerţie $\{I_j(t)\}$:

$$\{I(t)\} = \begin{Bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \\ . \\ I_j(t) \\ . \\ I_n(t) \end{Bmatrix} = -[m]\{\ddot{y}(t)\}. \tag{5.2}$$

Cum însă, blocajele care au fost introduse pentru a împiedica deplasările pe direcţiile GLD, nu există în realitate pe sistemul vibrant, rezultă că suma forţelor de inerţie şi a reacţiunilor din blocajele GLD, corespunzătoare celor „n" deformate ce se pot realiza, de tipul celei din figura 5.1.d, trebuie să fie nulă şi obţinem, astfel, „n" ecuaţii, câte una pentru fiecare grad de libertate.

De exemplu, pentru gradul de linertate „j" se obţine ecuaţia:

$$-I_j(t) + R_{j,1}(t) + R_{j,2}(t) + ... + R_{j,j}(t) + ... + R_{j,n}(t) = 0. \tag{5.3}$$

Cele „n" ecuaţii, de tipul celei de mai sus, constituie ecuaţiile de echilibru dinamic ale sistemului vibrant şi alcătuiesc un sistem de ecuaţii cu „n" ecuaţii şi „n" necunoscute.

Comparând deformata din figura 1.d cu cea din figura 5.1.f rezultă:

$$R_{j,j}(t) = K_{jj} y_j(t) \,. \qquad (5.4)$$

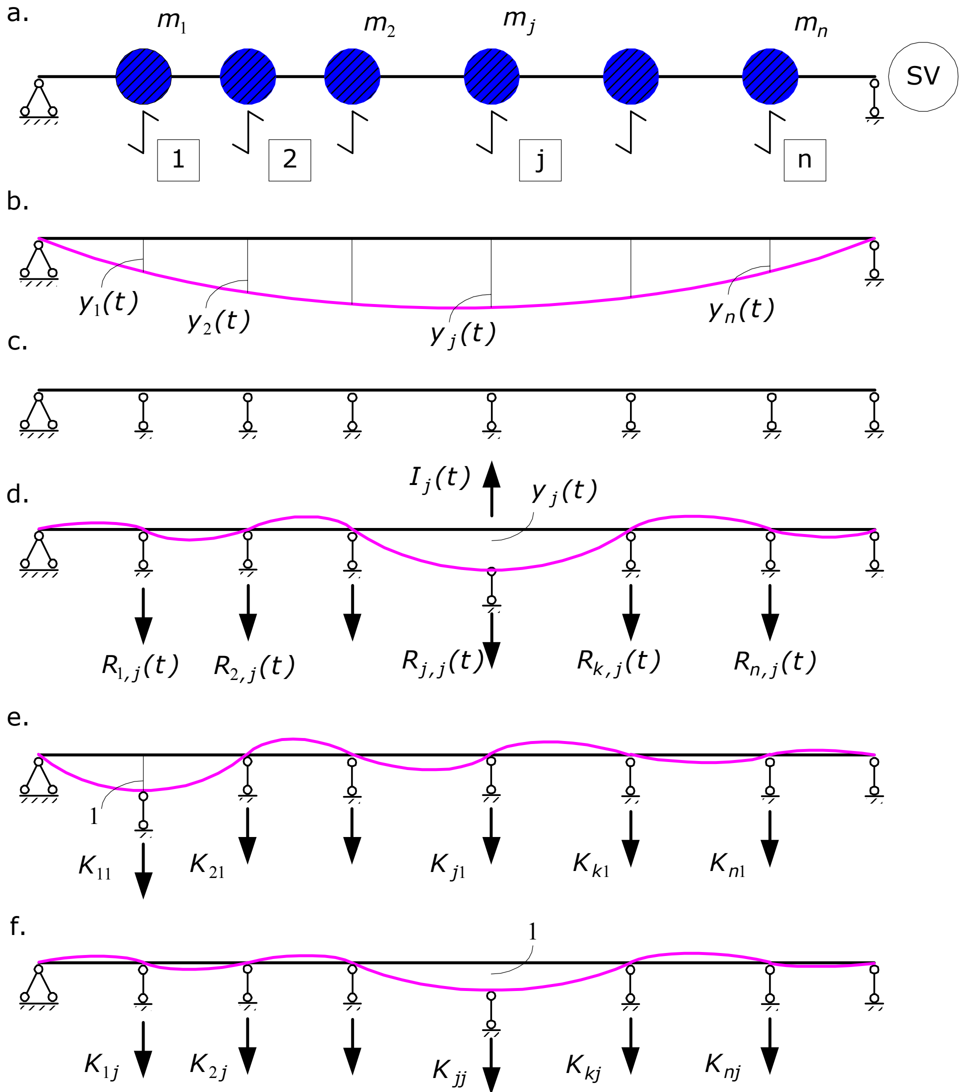


Fig. 5.1. Sistem vibrant cu nGLD

De asemenea, se pot scrie, şi pentru celelalte deformate, expresiile:

$$R_{j,1}(t) = K_{j1} y_1(t) \,,\; R_{j,2}(t) = K_{j2} y_2(t) \,,\; \ldots,\; R_{j,n}(t) = K_{jn} y_n(t) \,. \qquad (5.5)$$

Introducem relaţiile (5.4) şi (5.5) în ecuaţia (5.3) şi se ajunge la următoarea ecuaţie:

$$-I_j(t) + K_{j1}y_1(t) + K_{j2}y_2(t) + ... + K_{jj}y_j(t) + ... + K_{jn}y_n(t) = 0\,, \qquad (5.6)$$

iar pentru celelate „n” deformate de tipul celei din fig.5.1.d., deci prin producerea de cedări de reazeme pe direcţia fiecărui GLD, în blocajele simple de GLD, va rezulta un sistem de ecuaţii care, scris sub formă matriceală, arată astfel:

$$-\{I(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{0\}\,, \qquad (5.7)$$

unde $[K]$ reprezintă matricea de rigiditate a sistemului vibrant determinată în coordonatele dinamice ale sistemului,

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & . & K_{1j} & . & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & . & K_{2j} & . & K_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ K_{j1} & K_{j2} & . & K_{jj} & . & K_{jn} \\ . & . & . & . & . & . \\ K_{n1} & K_{n2} & . & K_{jn} & . & K_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (5.8)$$

Un element al matricei de rigiditate $[K]$, K_{jj} are semnificaţia unei forţe, care aplicată pe sistemul vibrant în dreptul masei m_j, produce pe direcţia GLD_j o deplasare egală cu unitatea, în timp ce toate celelate deplasări, de pe direcţia GLD, sunt blocate de forţele K_{rj}, $r = \overline{1,n}$.

Elementele matrice de rigiditate pot fi definite şi ca reacţiuni. Astfel, K_{jj} reprezintă reacţiunea din blocajul GLD_j când în acest blocaj se produce o cedare de reazem egală cu unitatea, iar în celelalte blocaje ale sistemului de bază dinamic, figura 5.1.c, iau naştere reacţiunile K_{rj}, $r = \overline{1,n}$.

Substituind expresia matriceală a forţelor de inerţie, relaţia (5.2), în ecuaţia (5.7), obţinem:

$$[m]\{\ddot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{0\}. \qquad (5.9)$$

Ecuaţia (5.9) reprezintă *ecuaţia generală a vibraţiilor libere* ale sistemelor vibrante cu nGLD. Sistemul este verificat de soluţiile particulare:

$$\{y(t)\} = \{A\}\sin(\omega t + \varphi)\,. \qquad (5.10)$$

Introducem soluţia (5.10) în ecuaţia matriceală (5.9), care devine:

$$([K] - \omega^2 [m])\{A\} = \{0\}, \qquad (5.11)$$

după ce am împărţit ecuaţia (matriceală) prin $\sin(\omega t + \varphi)$. Ecuaţia (5.11) este numită ecuaţia generală a vibraţiilor proprii.

Pentru ca sistemul de ecuaţii (5.11) să admită soluţii diferite de zero, determinantul principal trebuie să se anuleze:

$$\left| [K] - \omega^2 [m] \right| = 0 . \qquad (5.12)$$

Prin dezvoltarea determinantului (5.12) rezultă o *ecuaţie caracteristică*, numită şi *ecuaţia pulsaţiilor proprii*. Rezolvând această ecuaţie rezultă cele „n” pulsaţii proprii: $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, ..., \omega_n$, iar cu patratele acestor valori se constituie matriea spectrală a sistemului vibrant:

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & & \\ & \omega_2^2 & & & & \\ & & . & & & \\ & & & \omega_i^2 & & \\ & & & & . & \\ & & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} . \qquad (5.13)$$

Pentru aflarea vectorilor proprii de vibraţie ai sistemului vibrant se rezolvă *ecuaţia vectorilor proprii*, care are alura următoare:

$$([K] - \omega_i^2 [m])\{y\}_i = \{0\}, \quad i = \overline{1, n} . \qquad (5.14)$$

Rezolvând cele „n” sisteme de ecuaţii, obţinute prin variaţia indicelui „i”, se obţin cei „n” vectori proprii adimensionali $\{y\}_i$, cu ajutorul cărora se constituie matricea modală a sistemului vibrant:

$$[Y] = [\{y\}_1 \quad \{y\}_2 \quad . \quad \{y\}_i \quad . \quad \{y\}_n] . \qquad (5.15)$$

5.2. Aplicaţie – sistem vibrant cu 2GLD

Vom considera un sistem vibrant cu două mase: m_1 şi m_2, cărora li se acordă câte un grad de libertate dinamică. Se propune determinarea modurilor proprii de vibraţie: pulsaţiile proprii ω_1 şi ω_2 şi formele proprii de vibraţie $\{y\}_1$ şi $\{y\}_2$. Pentru aceasta, sunt parcurse următoarele etape de calcul:

a. Se constituie matricea maselor:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix}.$$

b. Se determină matricea de rigiditate a sistemului vibrant în coordonatele dinamice ale acestuia:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}.$$

c. Se scrie şi se rezolvă ecuaţia pulsaţiilor proprii:

$$\left\| \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix} \right\| = 0$$

sau

$$\left\| \begin{bmatrix} K_{11} - \omega^2 m_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \right\| = 0$$

şi

$$m_1 m_2 - \lambda(m_2 K_{11} + m_1 K_{22}) + \lambda^2 (K_{11} K_{22} - K_{12}^2) = 0$$

dacă

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

sau

$$\omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 (m_2 K_{11} + m_1 K_{22}) + (K_{11} K_{22} - K_{12}^2) = 0 .$$

În final:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{m_1 K_{22} + m_2 K_{11} \pm \sqrt{(m_1 K_{22} + m_2 K_{11})^2 - 4 m_1 m_2 (K_{11} K_{22} - K_{12}^2)}}{2 m_1 m_2} .$$

d. Formele proprii de vibraţii se calulează prin rezolvarea următoarelor două sisteme de ecuaţii:

$$([K] - \omega_1^2 [m])\{y\}_1 = \{0\}$$

$$([K] - \omega_2^2 [m])\{y\}_2 = \{0\}$$

unde:

$$\{y\}_1 - \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{2,1} \end{Bmatrix} \quad \text{şi} \quad \{y\}_2 - \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{2,2} \end{Bmatrix} .$$

Fiecare dintre sistemele de mai sus cuprind câte două ecuaţii, dar cum $y_{1,1} = 1$ şi $y_{1,2} = 1$, atunci, din prima ecuaţie a fiecărui sistem de ecuaţii se obţine ordonata $y_{2,1}$, respectiv $y_{2,2}$, iar cea de a doua ecuaţie, a fiecărui sistem, este utilizată pentru verificarea ordonate calculate.

5.3. Proprietatea de ortogonalitate a formelor proprii de vibraţie

Pentru a demonstra proprietatea de ortogonalitate a formelor proprii de vibraţie se pleacă de la ecuaţia formelor proprii (5.14), scrisă sub forma:

$$([K]\{y\}_i = \omega_i^2 [m])\{y\}_i . \quad (5.16)$$

Se multiplică la stânga, ecuaţia (5.16), cu o altă formă proprie de vibraţie transpusă, de exemplu $\{y\}_r^T$, rezultă:

$$\{y\}_r^T ([K]\{y\}_i = \omega_i^2 \{y\}_r^T [m])\{y\}_i . \quad (5.17)$$

Se transpune ecuaţia (5.16) şi se rescrie pentru modul „r" de vibraţie, se obţine:

$$\{y\}_r^T ([K] = \omega_r^2 \{y\}_r^T [m]) , \quad (5.18)$$

deoarece: $[K]^T = [K]$ şi $[m]^T = [m]$.

Expresia (5.18) se postmultiplică cu forma proprie de vibraţie corespunzătoare modului „i" de vibraţie:

$$\{y\}_r^T ([K]\{y\}_i = \omega_r^2 \{y\}_r^T [m])\{y\}_i . \quad (5.19)$$

Se scade relaţia (5.18) din (5.16), rezultă:

$$0 = (\omega_i^2 - \omega_r^2)\{y\}_r^T [m]\{y\}_i . \quad (5.20)$$

Dar, cum $\omega_i^2 \neq \omega_r^2$, sunt două pulsaţii proprii diferite ale sistemului vibrant, se ajunge la concluzia că produsul celor doi vectori proprii satisface relaţia:

$$\{y\}_r^T [m]\{y\}_i = 0 , \quad (5.21)$$

care va reprezenta *proprietatea de ortogonalitate* a două forme proprii de vibraţie: $\{y\}_i$ şi $\{y\}_r$.

De asemenea, se pot demonstra şi expresiile:

$$\{y\}_r^T [C]\{y\}_i = 0 , \quad (5.22)$$

$$\{y\}_r^T [\Delta]\{y\}_i = 0 \quad (5.23)$$

şi

$$\{y\}_r^T [K] \{y\}_i = 0 . \quad (5.24)$$

unde: $[C]$ reprezintă matricea de amortizare a sistemului vibrant

şi $[\Delta]$ - matricea de flexibilitate a sistemului vibrant.

5.4. Normalizarea formelor proprii de vibraţie

Ordonatele formelor (vectorilor) proprii de vibraţie nu sunt diferite în sens absolut. Când unei ordonate a unui vector propriu i se atribuie o anumită valoare, atunci se pot preciza şi celelalte elemente (ordonate), deoarece numai raportul dintre oricare două ordonate sunt constante şi cunoscute. Numai în cazul în care unul dintre elementele vectorului propriu este cunoscut, vectorul propriu devine unic în sens absolut. Acest proces de ajustare a elementelor unui mod natural, pentru a obţine o amplitudine unică, se numeşte *normalizare*.

Se observă că dacă i=r, în expresia (5.21) produsul matriceal este egal cu un scalar constant, diferit de zero, pe care îl vom numi termen inerţial sau masă inerţială:

$$\{y\}_r^T [m] \{y\}_r = M_r , \quad r = \overline{1,n} . \quad (5.25)$$

Aplicând acelaşi rationament asupra relaţiei (5.24) se obţine:

$$\{y\}_r^T [K] \{y\}_r = \omega_r^2 M_r = K_r , \quad (5.26)$$

unde K_r reprezintă rigiditatea generalizată a sistemului vibrant.

Se cunosc următoarele modalităţi de normalizare a unui vector propriu:

a. atribuirea unei valori egale cu unitatea masei generalizate în relaţia (5.25):

$$\{\overleftarrow{y}\}_r^T [m] \{\overleftarrow{y}\}_r = 1, \quad (5.27)$$

unde $\{\overleftarrow{y}\}_r$ reprezintă vectorul propriu normalizat, se calculează cu relaţia:

$$\{\overleftarrow{y}\}_r = \frac{1}{\sqrt{M_r}} \{y\}_r ; \quad (5.28)$$

b. normalizarea unui vector propriu prin acordarea valorii proprii unitate celui mai mare termen al unui vector;
c. normalizarea prin atribuirea valorii unitate lungimii vectorului modal.

Dacă folosim matricea modală, $\left[\overline{Y}\right]$:

$$\left[\overline{Y}\right] = \left[\left\{\overline{y}\right\}_1 \quad \left\{\overline{y}\right\}_2 \quad . \quad \left\{\overline{y}\right\}_i \quad . \quad \left\{\overline{y}\right\}_{n1}\right], \tag{5.29}$$

atunci se pot scrie relaţiile:

$$\left[\overline{Y}\right]^T [m] \left[\overline{Y}\right] = [1], \tag{5.30}$$

$$\left[\overline{Y}\right]^T [K] \left[\overline{Y}\right] = [\Omega] \tag{5.31}$$

şi

$$\left[\overline{Y}\right]^T [C] \left[\overline{Y}\right] = [2\nu\omega]. \tag{5.32}$$

5.5. Proprietăţile pulsaţiilor proprii

Se defineşte matricea dinamică, notată $[D]$, prin intermediul produsului matriceal dintre matricea de flexibilitatea a sistemului vibrant şi matricea de inerţie:

$$[D] = [\Delta][m]. \tag{5.33}$$

Determinantul şi urma matricei dinamice sunt egale cu determinantul şi urma inversei matricei spectrale $[\Omega]$:

$$\det([D]) = \det([\Omega]^{-1}, \tag{5.35}$$

$$u([D]) = u([\Omega]^{-1}. \tag{5.36}$$

Inversa matricei dinamice se calculează cu relaţia

$$[D]^{-1} = [m]^{-1}[\Delta]^{-1} = [m]^{-1}[K], \tag{5.37}$$

deoarece

$$[\Delta][K] = [I]. \tag{5.38}$$

Determinantul şi urma inversei matricei dinamice sunt egale cu determinantul şi urma matricei spectrale:

$$\det([D]^{-1}) = \det([m]^{-1}[K]) = \det([\Omega]), \tag{5.39}$$

$$u([D]^{-1}) = u([m]^{-1}[K]) = u([\Omega]). \tag{5.40}$$

5.6. Determinarea matricei de rigiditate a sistemului vibrant

În vederea determinării elementele matricei de rigiditate, inclusă în relaţia (5.7), vom considera o structură static nedeterminată, figura 5.2.a şi vom utiliza mai multe procedee de calcul. Pentru început, se vor

bloca deplasările pe direcţiile gradelor de libertate dinamică, figura 5.2.b, iar situaţiile de încărcare sunt prezentate în figura 5.2.c şi d.

În cazul structurii considerate, matricea de rigiditate are forma:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}. \tag{5.41}$$

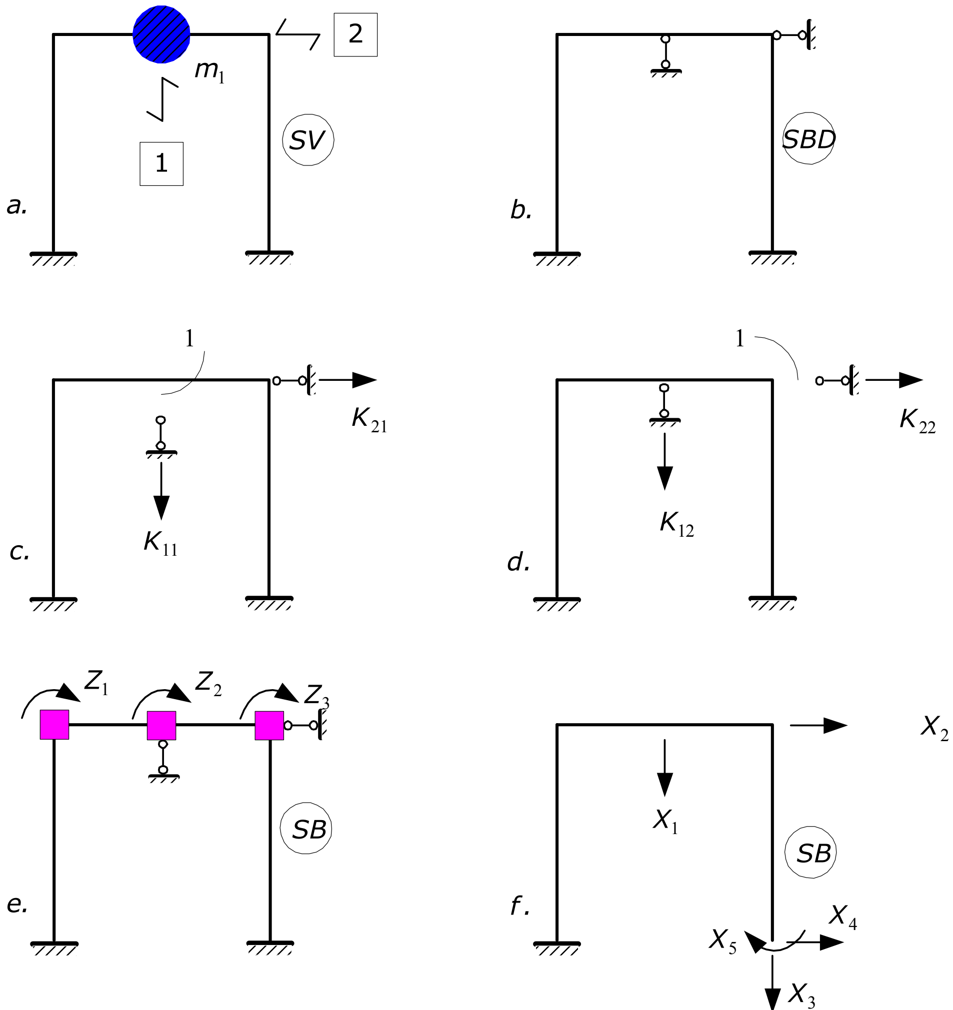


Fig. 5.2. Calculul elementelor matricei de rigiditate:a. sistem vibrant; b. sistem de bază dinamic; c. şi d. situaţii de încărcare; e. sistem de bază în metoda deplasărilor; f. sistem de bază în metoda forţelor

5.6.1. Folosirea metodei forţelor

Primul procedeu pentru determinarea elementelor matricei de rigiditate constă în aplicarea metodei forţelor în cazul celor două situaţii de încărcare, figura 5.2.c şi d.

Datorită introducerii celor două blocaje pe direcţiile GLD, structura care era de trei ori static nedeterminată, a devenit de cinci ori static nedeterminată.

Se alege un sistem de bază static determinat prin suprimarea a cinci legături (interioare si/sau exterioare). Este indicat ca primele necunoscute nominalizate să fie cele corespunzătoare suprimării legăturilor suplimentare, introduse după direcţiile GLD, după care se suprimă şi celelate legături, până când sistemul vibrant devine static determinat, figura 5.2.f.

Ecuaţia de echilibru matriceală are forma:

$$\left[\delta_{ij}\right]\left\{x_j^r\right\} = \left\{\Delta_{ic}^r\right\}; \quad r = 1,2\,, \tag{5.42}$$

unde: $\left[\delta_{ij}\right]$ reprezintă matricea coeficienţilor, un coeficient se determină cu relaţia:

$$\delta_{ij} = \sum \frac{\overline{M}_i(x) M_j(x)}{EI} dx\,; \tag{5.43}$$

x_j^r reprezintă necunoscuta introdusă pe direcţia legăturii suprimate „j”, pentru a transforma sistemul vibrant, din forma sistemului de bază dinamic, într-un sistem de bază, corespunzător metodei forţelor;

r - o situaţie de încărcare corespunzătoare GLD;

$\left\{\Delta_{ic}^r\right\}$- vectorul termenilor liberi, un element al acestui vector se calculează cu expresia:

$$\Delta_{ic}^r = \pm 1 \bullet \Delta_i \pm \sum R_k^i \Delta_k\,; \tag{5.44}$$

Δ_i - cedarea de reazem produsă pe direcţia reazemului ”i”;

R_k^i - reacţiunea din blocajul „k” al sistemului de bază, când acesta este încărcat de o forţă egală cu unitatea, aplicată pe direcţia legăturii suprimate „i”;

Δ_k - cedarea de reazem produsă pe direcţia reazemului „k”.

Prin rezolvarea celor două sisteme sisteme de ecuaţii (5.42) se obţin cele patru elemente ale matricei de rigiditate:

$$x_1^1 = K_{11} \text{ şi } x_2^1 = K_{21}, \quad 5.45)$$

respectiv:

$$x_1^2 = K_{12} \text{ şi } x_2^2 = K_{22}. \quad (5.46)$$

5.6.2. Folosirea metodei deplasărilor

Un al doilea procedeu, pentru determinarea elementelor matricei de rigiditate, constă în aplicarea metodei deplasărilor, în cazul celor două situaţii de încărcare desenate în figura 2.c şi d. Sistemul de bază este arătat în figura 2.e.

Analizând sistemul de bază dinamic, figura 2.b, obţinut din sistemul vibrant la care s-au blocat deplasările pe direcţiile GLD, constatăm că acesta este un cadru cu noduri fixe. Sistemul de bază corespunzător metodei deplasărilor, prezentat în figura 2.e, are nodurile blocate.

Ecuaţia de echilibru, în formă matriceală, este:

$$[r_{ij}]\{z_j^r\} + \{R_{ip}^r\} = \{0\}; \quad r = 1,2, \quad (5.47)$$

în care: $[r_{ij}]$ reprezintă matricea coeficienţilor, matricea de rigiditate dedusă în coordonatele statice ale sistemului;

$\{z_j^r\}$ - vectorul necunoscutelor, deplasările unghiulare ale nodurilor;

$\{R_{ip}^r\}$ - vectorul termenilor liberi; termenii liberi sunt produşi de cedările de reazem, în cele două situaţii de încărcare,

r - situaţii de încărcare.

Pentru calculul termenilor liberi se produc, pe sistemul de bază, în cazul structurii propuse în studiu, figura 5.3, cedări de reazem. Cele două situaţii de încărcare sunt prezentate în figura 5.b şi c, iar pentru calculul coeficienţilor, de exemplu în cazul primei necunoscute, z_1, deformata sistemului de bază, figura 3.a, este desenată în figura 3.d.

După ce se calulează coeficienţii şi termenii liberi, se rezolvă cele două sisteme de ecuaţii de echilibru static. Cu necunoscutele determinate se trasează diagramele de eforturi, momente încovoietoare. Aplicând, apoi, principiul lucrului mecanic virtual se calculează, pentru momentele încovoietoare determinate anterior, reacţiunile din reazemele simple introduse pe direcţiile GLD. Aceste reacţiuni sunt identice cu elementele matricei de rigiditate, pe care ne-am propus să o determinăm.

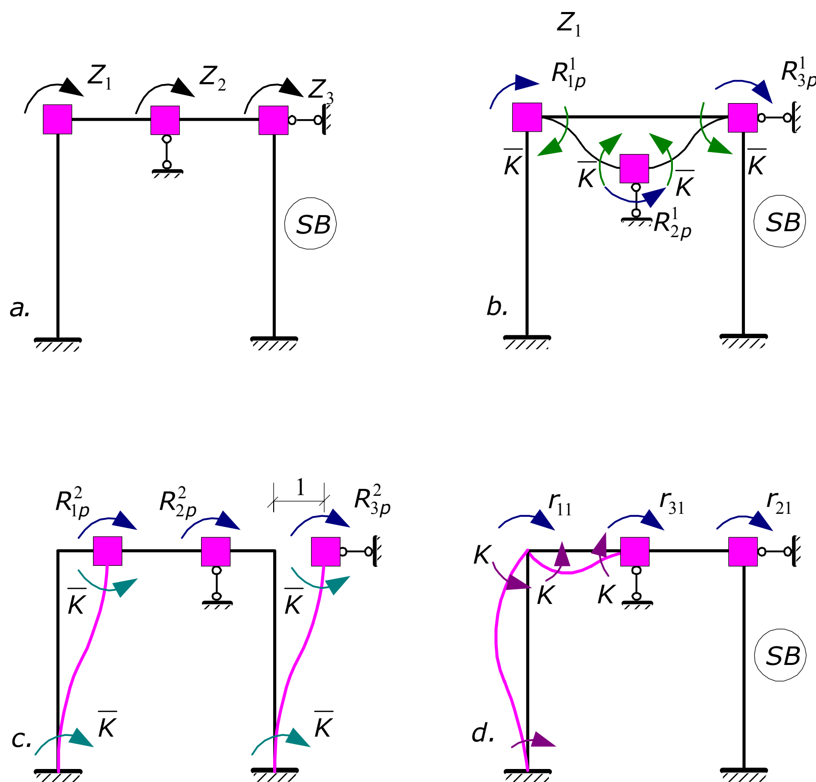


Fig. 5.3. Calculul elementelor matricei de rigiditate: a. sistem de bază; b. deformata sistemului de bază pentru prima situaţie de încărcare, cedare de reazem pe direcţia GLD_1; c. deformata sistemului de bază pentru a doua situaţie de încărcare, cedare de reazem pe direcţia GLD_2; d. deformata sistemului de bază pentru acţiunea $Z_1=1$, în vederea calculului coeficienţilor

5.6.3. Condensarea matricei de rigiditate

Un al trielea procedeu, pentru a găsi matricea de rigiditate în coordonatele dinamice ale sistemului vibrant, constă în condensarea matricei de rigiditate determinată corespunzător coordonatelor statice ale sistemului vibrant, deci a matricei coeficienţilor din metoda deplasărilor.

Sistemul vibrant este arătat în figura 4.a, iar sistemul de bază corespunzător metodei deplasărilor în figura 4.b.

Pentru demonstraţie, se pleacă de la ecuaţia generală de echilibru static, din metoda deplasărilor:

$$[r_{ij}]\{z_j\} = \{P\} \tag{5.48}$$

sau

$$[r_{ij}]\begin{Bmatrix}\{X\}\\ \begin{Bmatrix}Y\\ \theta\end{Bmatrix}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\{p_x\}\\ \begin{Bmatrix}P_y\\ M\end{Bmatrix}\end{Bmatrix} \quad , \tag{5.49}$$

unde: $\{X\}$ reprezintă vectorul necunoscutelor deplasări liniare ale nodurilor structurii pe direcţia axei OX;

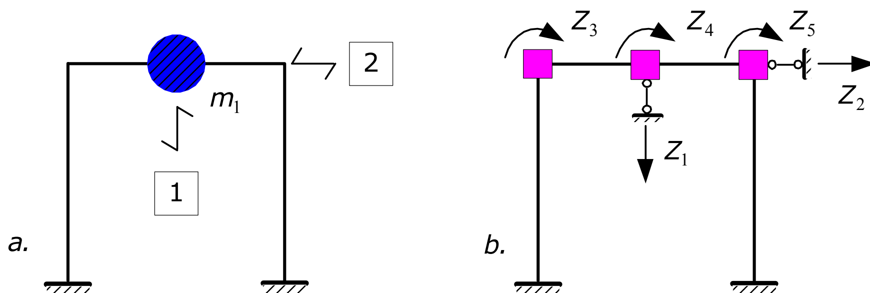


Fig. 5.4. Calculul elementelor matricei de rigiditate: a. sistem vibrant (dinamic); b. sistem de bază în metoda deplasărilor

$\begin{Bmatrix}Y\\ \theta\end{Bmatrix}$ - vectorul necunoscutelor: deplasări liniare pe direcţia axei OY şi deplasări unghiulare în raport cu axa OZ, ale nodurilor structurii;

$\lfloor P \rfloor$ - vectorul termenilor liberi, în cazul forţelor exterioare aplicate în noduri. Elementele fiind acţiuni, vectorul termenilor liberi este scris, în ecuaţiile de condiţie, în dreapta semnului de egalitate,.

Dacă partiţionăm corespunzător şi matricea coeficienţilor, în relaţia (5.49), aceasta devine:

$$\begin{bmatrix}[r_{11}] & [r_{12}]\\ [r_{21}] & [_{22}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{X\}\\ \begin{Bmatrix}Y\\ \theta\end{Bmatrix}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\{p_x\}\\ \begin{Bmatrix}P_y\\ M\end{Bmatrix}\end{Bmatrix} \quad . \tag{5.50}$$

Cum $\{P_x\} \neq \{0\}$, iar $\begin{Bmatrix}P_y\\ M\end{Bmatrix} = \{0\}$, se va elimina vectorul $\begin{Bmatrix}y\\ \theta\end{Bmatrix}$ din relaţia (5.50), rezultă:

$$[r_{11}]\{X\} + [r_{12}]\begin{Bmatrix}y\\ \theta\end{Bmatrix} = \{P_x\} \quad , \tag{5.51}$$

$$[r_{21}]\{X\} + [r_{22}]\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \{0\} \quad . \tag{5.52}$$

Din relaţia (5.52) se determină vectorul $\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}$:

$$[r_{22}]^{-1}[r_{21}] = -\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} \quad . \tag{5.53}$$

Se substituie (5.53) în (5.51):

$$([r_{11}] - [r_{12}][r_{22}]^{-1}[r_{21}])\{X\} = -\{P_x\} \quad . \tag{5.54}$$

În concluzie: matricea de rigiditate în coordonatele dinamice ale sistemului vibrant, notată - $[K]$, se determină cu relaţia:

$$[K] = [r_{11}] - [r_{12}][r_{22}]^{-1}[r_{21}]. \tag{5.55}$$